

# Formulaire d'aide à la résolution des problèmes de calcul topométrique



## Session 2016

### Sommaire

1 - Triangle quelconque	11- Intersection droite - cercle
2 - Triangles semblables	12- Nivellement indirect
3 - Triangle rectangle	13- Corrections des distances
4 - Trapèze	14- Correction de niveau apparent
5 - Polygone de n côtés	15- Moyenne arithmétique, moyenne pondérée
6 - Raccordements circulaires	16- Le G0 (ou V0)
7 - Secteur circulaire	17- Relèvement sur 3 points - <i>méthode du barycentre</i> -
8 - Transformations de coordonnées	18- Relèvement sur 3 points - <i>méthode de Delambre</i> -
9 - Intersection de 2 droites	19- Changement de base
10- Intersection de 2 cercles	

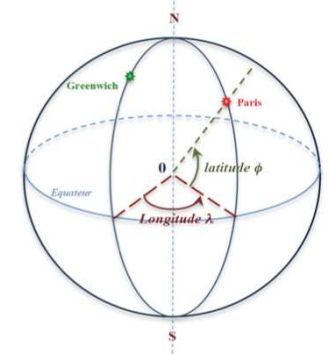
## Conventions relatives aux travaux topographiques

### Unités en vigueur :

- distance en mètre (m)
- angle en grades (gon)

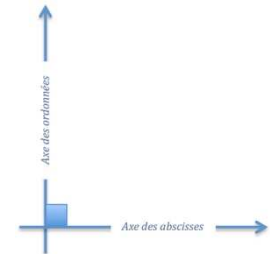
### Systèmes de coordonnées géographiques

longitude :  $\lambda$   
 latitude :  $\Phi$   
 hauteur sur l'ellipsoïde : **h**

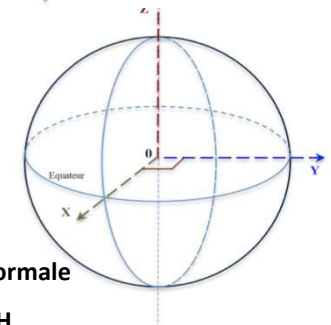


### Systèmes de coordonnées planimétriques

- Coordonnées locales : **x, y**
- Coordonnées Lambert 93 : **e, n**
- Coordonnées RGF 93 CC (9 zones) : **E, N**



### Systèmes de coordonnées géocentriques X, Y, Z



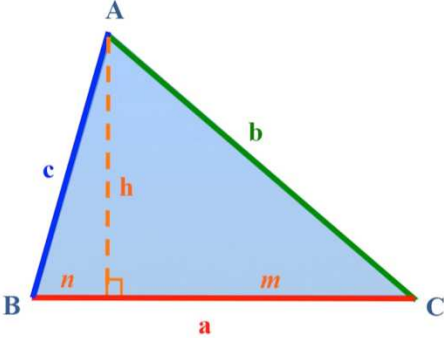
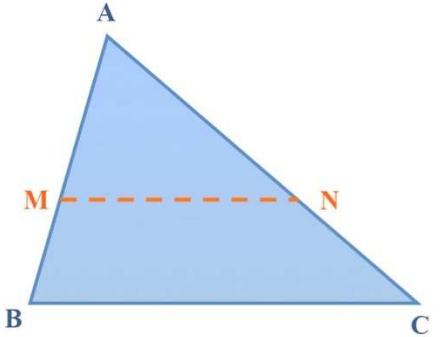
### Systèmes de coordonnées altimétriques : altitude normale

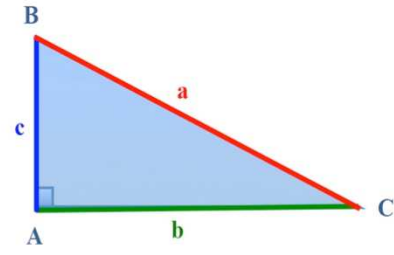
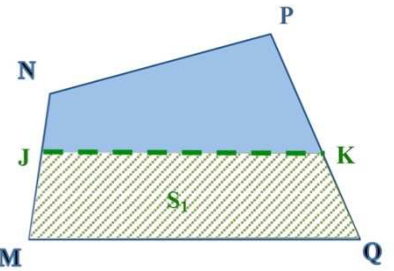
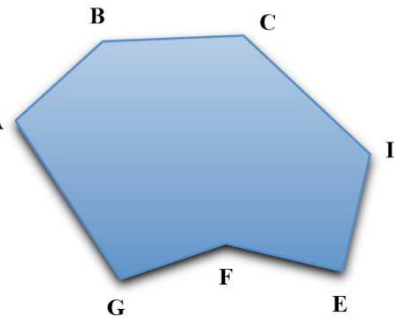
- **NGF-IGN 69** (NGF-IGN78 pour la Corse) : **H**

Rayon moyen de la terre : **Rm = 6378 km** environ

### Terminologie usitée :

- **ht** ou **hi** = hauteur des tourillons ou hauteur de l'appareil
- **hp** = hauteur de prisme ou **hv** (voyant) ou **hr** (réflecteur)

croquis - schémas	formules
<p><b>1-Triangle quelconque</b></p> 	<p><b>Relation des sinus</b>  <math>\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}</math></p> <p><b>Relation des cosinus</b>  <math>a^2 = b^2 + c^2 - 2 b \cdot c \cdot \cos A</math>  <math>b^2 = a^2 + c^2 - 2 a \cdot c \cdot \cos B</math>  <math>c^2 = a^2 + b^2 - 2 a \cdot b \cdot \cos C</math></p> <p><b>Superficie</b>  <math>S = (a \cdot b \cdot \sin C) / 2</math>  <math>S = (a \cdot c \cdot \sin B) / 2</math>  <math>S = (b \cdot c \cdot \sin A) / 2</math></p> <p><math>S = \frac{a^2 \cdot \sin B \cdot \sin C}{2 \cdot \sin A}</math></p> <p>avec <math>p = \frac{1}{2}</math> périmètre  <math>S = \sqrt{[p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)]}</math></p> <p><math>\tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p - b) \cdot (p - c)}{p \cdot (p - a)}}</math></p> <p><math>n = (c^2 + a^2 - b^2) / 2a</math>  <math>h^2 = c^2 - n^2 = b^2 - m^2</math></p>
<p><b>2-Triangles semblables</b></p> 	<p><b>Théorème de Thalès</b></p> <p><math>\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} = k</math></p> <p><math>S_{AMN} = S_{ABC} \cdot k^2</math></p>

croquis - schémas	formules
<p><b>3-Triangle rectangle</b></p> 	<p><math>\sin B = \text{côté opposé} / \text{hypoténuse} = b/a</math>  <math>\cos B = \text{côté adjacent} / \text{hypoténuse} = c/a</math>  <math>\tan B = \text{côté opposé} / \text{côté adjacent} = b/c</math></p> <p><math>BA^2 + AC^2 = BC^2</math></p> <p><b>Superficie</b>  <math>S = \frac{1}{2} \cdot (b \cdot c)</math></p>
<p><b>4-Trapèze</b></p> 	<p><math>S_1 = \text{superficie MJKQ}</math></p> <p><math>JK^2 = MQ^2 - 2S_1 \cdot \left( \frac{1}{\tan Q} + \frac{1}{\tan M} \right)</math></p> <p><math>QK = \frac{2S_1}{(MQ + JK) \cdot \sin Q}</math></p> <p><math>JM = \frac{2S_1}{(MQ + JK) \cdot \sin M}</math></p>
<p><b>5-Polygone de n cotés</b></p> 	<p><b>Somme des angles intérieurs</b>  <math>\Sigma = (n - 2) \cdot 200</math></p> <p><b>Somme des angles extérieurs</b>  <math>\Sigma = (n + 2) \cdot 200</math></p> <p><b>Superficie</b></p> <p><math>2S = \sum_{i=n}^{i=1} [x_i \cdot (y_{(i+1)} - y_{(i-1)})]</math></p> <p><math>2S = \sum_{i=n}^{i=1} [y_i \cdot (x_{(i+1)} - x_{(i-1)})]</math></p>

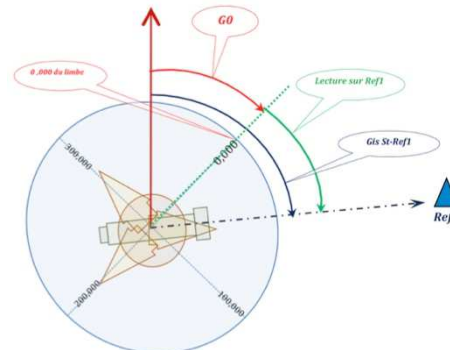
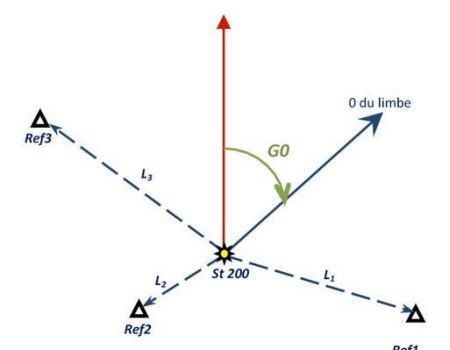
croquis - schémas	formules
<p><b>6-Raccordements circulaires</b></p>	<p>Périmètre du cercle = <math>2 \cdot \pi \cdot r</math>            Superficie du disque = <math>\pi \cdot r^2</math></p> <p>Longueur de la corde <math>T_1T_2 = 2 \cdot r \cdot \sin \frac{\beta}{2}</math>            Longueur de l'arc = <math>T_1T_2 = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot \beta}{400}</math>            Longueur de la flèche <math>MH = r - [r \cdot \cos \frac{\beta}{2}]</math>            Longueur du segment de la tangente  <math>ST_1 = ST_2 = r \cdot \tan \frac{\beta}{2}</math></p>
<p><b>7-Secteur circulaire : superficies</b></p>	<p>Triangle: <math>S = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \sin \beta</math></p> <p>Secteur: <math>S = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \beta}{400}</math></p> <p>Segment: <math>S_{\text{Secteur}} - S_{\text{triangle}}</math></p>

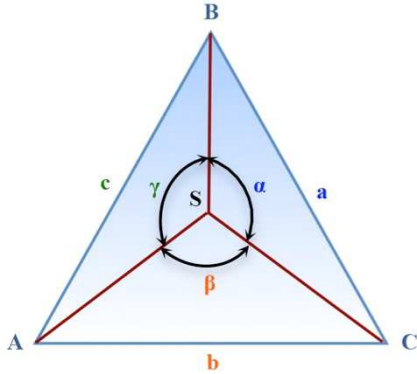
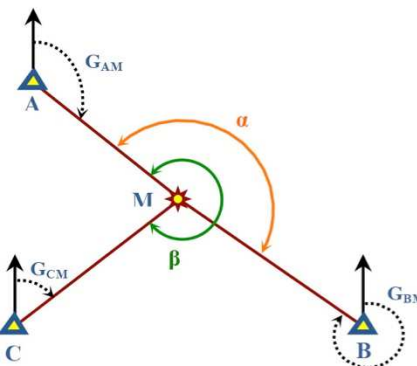
croquis - schémas	formules
<p><b>-Transformations de coordonnées</b></p>	<p><math>x_B - x_A = D_{AB} \cdot \sin G_{AB}</math>  <math>y_B - y_A = D_{AB} \cdot \cos G_{AB}</math></p> <p><math>D_{AB} = \sqrt{[(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2]}</math></p> <p>Gisement AB</p> <p><math>\tan G' = (x_B - x_A) / (y_B - y_A)</math></p> <p><math>\tan G' = \frac{\Delta x}{\Delta y}</math></p> <p>on obtient <math>G'</math> avec son signe</p> <p>si <math>\Delta x \geq 0</math> et <math>\Delta y \geq 0 \rightarrow G_{AB} = G'</math>            si <math>\Delta x \geq 0</math> et <math>\Delta y \leq 0 \rightarrow G_{AB} = G' + 200</math>            si <math>\Delta x \leq 0</math> et <math>\Delta y \leq 0 \rightarrow G_{AB} = G' + 200</math>            si <math>\Delta x \leq 0</math> et <math>\Delta y \geq 0 \rightarrow G_{AB} = G' + 400</math></p>
<p><b>9-Intersection de deux droites</b></p>	<p><b>1ère méthode :</b>  <math>G_{AB}</math> et <math>D_{AB}</math> par <math>(x, y)</math>  <b>résolution du triangle AMB</b>            angle A = <math>G_{AB} - G_{AM}</math>            angle B = <math>G_{BM} - G_{BA}</math>  <math>D_{AM}</math> et <math>D_{BM}</math></p> <p>Calcul des <math>(x, y)</math> de M depuis A  <b>Contrôle :</b> <math>(x, y)</math> de M depuis B</p> <p><b>2ème méthode : (formule de Delambre)</b>            depuis A  <math>y_M - y_A = \frac{(x_A - x_B) - (y_A - y_B) \cdot \tan G_{BM}}{\tan G_{BM} - \tan G_{AM}}</math></p> <p><math>x_M - x_A = (y_M - y_A) \cdot \tan G_{AM}</math></p> <p><b>Contrôle :</b> idem depuis B</p>

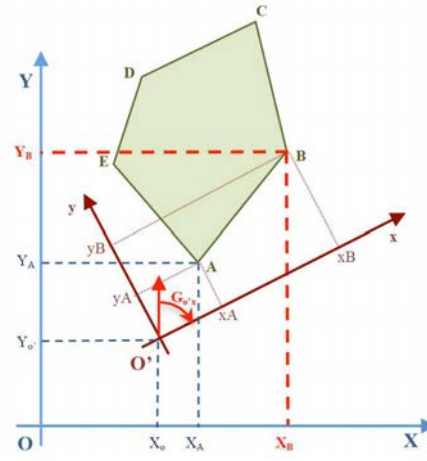
croquis - schémas	formules
<p><b>10-Intersection de deux cercles</b></p>	<p>calcul de <math>G_{O_1-O_2}</math> et <math>D_{O_1-O_2}</math> par <math>(x,y)</math></p> <p>résolution du triangle <math>O_1O_2M</math></p> <p>calcul de <math>G_{O_1-M}</math> puis <math>x_M</math> et <math>y_M</math> par rapport à <math>O_1</math></p> <p><b>Contrôle :</b></p> <p>calcul de <math>G_{O_2-M}</math> puis calcul de <math>x_M</math> et <math>y_M</math> par rapport à <math>O_2</math></p>
<p><b>11-Intersection droite – cercle</b></p>	<p><math>G_{AO}</math> et <math>D_{AO}</math> par <math>(x,y)</math></p> <p><b>résolution du triangle <math>AOM_1</math></b></p> <p><math>OM_1 = r = \text{rayon}</math> Calcul de l'angle A, de l'angle <math>M_1</math>, de l'angle O Distance <math>AM_1</math></p> <p>Calcul des <math>(x,y)</math> de <math>M_1</math> depuis A</p> <p><b>Contrôle :</b> Calcul des <math>(x,y)</math> de <math>M_1</math> depuis O</p> <p>idem pour le triangle <math>AOM_2</math></p>

croquis - schémas	formules
<p><b>12-Nivellement indirect</b></p>	<p><math>Dh = \sqrt{Di^2 - \Delta hi^2}</math></p> <p>Dénivelée instrumentale <math>\Delta hi</math></p> <p><math>\Delta hi = Di \cdot \cos V</math></p> <p><math>\Delta hi = Dh / \tan V</math></p> <p><math>Dh = Di \cdot \sin V</math></p> <p><math>H_p = H_s + ht + \Delta hi - hp</math></p>
<p><b>13- Corrections des distances</b></p>	<p>Pour obtenir une distance, il conviendra d'apporter aux mesures de longueurs les corrections suivantes :</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1- constante de prisme (donnée constructeur)</li> <li>2- correction atmosphérique - <math>Ca</math> - obtenue par lecture sur un abaque (saisie sur le terrain au moment des mesures)</li> <li>3- réduction à l'horizontale <b><math>Dh = Di \cdot \sin V</math></b></li> <li>4- correction de réduction à l'ellipsoïde - <math>Co</math> - ou <math>C_{\text{ellipsoïde}}</math> <b><math>Co = -\frac{Dh \cdot h}{R + h}</math></b></li> <li>5- correction de représentation plane ou de projection - <math>Cr</math> ou <math>Cl</math> - <i>cette correction varie en fonction de la situation géographique du chantier, elle est obtenue avec « CIRCE ».</i></li> </ol>

formules	
<p><b>Transformer une Dh en Dr</b> (distance réduite à la projection)</p> <p><b>Coefficients de réduction et module</b></p> <p>- Coefficient de réduction à l'ellipsoïde:</p> $k_{\text{ellipsoïde}} = -1000 \cdot \frac{hm}{(Rm + hm)}$ <p>- Coefficient d'altération linéaire :</p> <p><b>kr</b> lu à l'aide du logiciel CIRCE</p> <p><i>hm</i> = hauteur moyenne au dessus de l'ellipsoïde  <i>Rm</i> = rayon moyen de la terre  avec, <i>Rm</i> et <i>hm</i> en m, et <i>k<sub>ellipsoïde</sub></i> et <i>kr</i> en m/km</p>	<p><b>Module m</b> (avec 6 décimales)</p> $m = 1 + \frac{k_{\text{ellipsoïde}} + kr}{1000}$ <p><b>Distance réduite à la projection</b></p> $Dr = Dh \cdot m$ <p><i>Dr</i> et <i>Dh</i> en mètre</p>
<p><b>14- Correction de niveau apparent</b></p> <p>Pour des portées supérieures à 300m, il est nécessaire de prendre en compte deux erreurs systématiques :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- l'erreur due à la sphéricité de la terrestre</li> <li>- l'erreur due à la réfraction atmosphérique.</li> </ul> <p>Ces erreurs de sphéricité et de réfraction sont généralement associées en une seule erreur nommée <b>erreur de niveau apparent</b>.</p> <p>La correction globale est appelée correction de niveau apparent <b>Cna</b>.</p> <p>Cette correction est à ajouter à la dénivelée.</p> <p>expression simplifiée : <math>Cna = \frac{Dh^2}{15,2}</math></p> <p>Avec <i>Cna</i> en mètre, et <i>Dh</i> en km</p>	<p><b>15- Calcul d'une moyenne de plusieurs valeurs</b></p> <p><b>Moyenne arithmétique :</b></p> $\text{Moyenne des valeurs} = \frac{\text{valeur 1} + \text{valeur 2} + \dots + \text{valeur n}}{n}$ <p>avec : <i>n</i> = nombre de valeurs prises en compte</p> <p><b>Moyenne pondérée :</b></p> $\text{Moyenne des valeurs} = \frac{\sum Vi \cdot pi}{\sum pi}$ <p>avec : <i>V</i> = valeur (longueur, angle, etc.)  <i>pi</i> = poids attribué à la valeur <i>i</i></p>

croquis - schémas	formules
<p><b>16- le G0 (ou V0):</b></p>  	<p>Le <b>G0</b> (ou <b>V0</b>) d'une station est le gisement du zéro du limbe de l'appareil : gisement de la droite passant par le centre du limbe et la graduation « zéro » de ce limbe.</p> $GO_{\text{station}} = G_{\text{St-Ref1}} - \text{lecture sur Ref1}$ <p><b>Le Go moyen</b></p> <p>Pour obtenir une précision satisfaisante de l'orientation de la station (et la contrôler!) plusieurs références connues en coordonnées sont visées. Il faut alors calculer un <b>G0 moyen</b> à partir des différents G0 obtenus.</p> <p>Deux méthodes sont alors possibles:</p> <p>a - <b>Go moyen par moyenne arithmétique</b> : si les visées sont sensiblement d'égales longueurs.</p> $GO_{\text{moyen St}} = \frac{\sum GO_{\text{St-Ref } i}}{n}$ <p>avec <i>n</i> = nb de visées</p> <p>b - <b>Go moyen par moyenne pondérée</b> : si les visées sont d'inégales longueurs</p> <p>La pondération est alors proportionnelle à la longueur de chaque visée.</p> <p><b>Remarque:</b> plus une visée est longue plus son orientation angulaire est précise.</p> $GO_{\text{moyen St}} = \frac{\sum (GO_{\text{St-}i} \cdot Li)}{\sum Li}$ <p>avec :</p> <p><b>G0<sub>St-i</sub></b> = différents G0 calculés depuis la station  <b>Li</b> = longueur de chaque visée</p>
<p>Moyenne arithmétique :</p> $Go_{St200} = \frac{GO_{St200-Ref1} + GO_{St200-Ref2} + GO_{St200-Ref3}}{3}$ <p>Moyenne pondérée :</p> $Go_{\text{moyen St200}} = \frac{(GO_{St-Ref1} \cdot L_1) + (GO_{St-Ref2} \cdot L_2) + (GO_{St-Ref3} \cdot L_3)}{L_1 + L_2 + L_3}$	

croquis - schémas	formules
<p><b>17-Relèvement sur 3 points:</b> <i>méthode du barycentre</i></p> 	<p>S est inconnu et stationné</p> <p>A, B et C sont trois points connus</p> <p><math>\alpha + \beta + \gamma = 400 \text{ gon}</math> et <math>A + B + C = 200 \text{ gon}</math></p> $ma = \frac{1}{(\tan^{-1} A - \tan^{-1} \alpha)}$ $mb = \frac{1}{(\tan^{-1} B - \tan^{-1} \beta)}$ $mc = \frac{1}{(\tan^{-1} C - \tan^{-1} \gamma)}$ $x_S = \frac{ma \cdot x_A + mb \cdot x_B + mc \cdot x_C}{ma + mb + mc}$ $y_S = \frac{ma \cdot y_A + mb \cdot y_B + mc \cdot y_C}{ma + mb + mc}$
<p><b>18-Relèvement sur 3 points:</b> <i>méthode de Delambre</i></p> 	<p>M est inconnu et stationné</p> <p>A, B et C sont trois points connus</p> $\tan G_{AM} = \frac{\left(\frac{x_A - x_B}{\tan \alpha}\right) - \left(\frac{x_A - x_C}{\tan \beta}\right) + (y_B - y_C)}{\left(\frac{y_A - y_B}{\tan \alpha}\right) - \left(\frac{y_A - y_C}{\tan \beta}\right) - (x_B - x_C)}$ <p><math>G_{BM} = G_{AM} + \alpha</math></p> $y_M = y_A + \frac{[(x_A - x_B) - (y_A - y_B) \cdot \tan G_{BM}]}{(\tan G_{BM} - \tan G_{AM})}$ $x_M = x_A + (y_M - y_A) \cdot \tan G_{AM}$

croquis - schémas	formules
<p><b>19- Changement de base :</b> <i>passer d'un système initial à un système final</i></p>  <p><i>-sur le schéma, XOY représente un système orthonormé plan-</i></p>	<p>Eléments connus :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Les coordonnées x et y des points A et B sont connues dans le système initial.</li> <li>- Les coordonnées X et Y des points o' et A sont connues dans le système final.</li> </ul> <p>- Avec le <b>gisement de l'axe O'x connu</b> dans le système général : <b>GO'x = GAB - gAB + 100</b></p> <p>Eléments cherchés :</p> $XB = XA + \Delta x \cdot \sin G_{O'x} - \Delta y \cdot \cos G_{O'x}$ $YB = YA + \Delta x \cdot \cos G_{O'x} + \Delta y \cdot \sin G_{O'x}$ <p>Soit pour un cas général</p> $X_n = X_{(n-1)} + \Delta x \cdot \sin G_{O'x} - \Delta y \cdot \cos G_{O'x}$ $Y_n = Y_{(n-1)} + \Delta x \cdot \cos G_{O'x} + \Delta y \cdot \sin G_{O'x}$ <p>avec <math>\Delta x = x_n - x_{(n-1)}</math> et <math>\Delta y = y_n - y_{(n-1)}</math></p> <p>Avec sur le schéma :</p> <p><math>xO'y</math> = système initial <math>XOY</math> = système final</p> <p><math>x_A</math> et <math>y_A</math> = coordonnées dans le système initial <math>X_A</math> et <math>Y_A</math> = coordonnées dans le système final <math>GAB</math> = gisement dans le système final <math>gAB</math> = gisement dans le système initial</p> <p>- Avec le <b>gisement de l'axe O'y connu</b> dans le système final:</p> $GO'y = GAB - gAB$ $X_n = X_{(n-1)} + \Delta x \cdot \cos G_{O'y} + \Delta y \cdot \sin G_{O'y}$ $Y_n = Y_{(n-1)} + \Delta y \cdot \cos G_{O'y} - \Delta x \cdot \sin G_{O'y}$